Sur les contractions de l'espace de Hilbert. XII
Fonctions intérieures admettant des facteurs extérieurs

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Soit T une contraction complètement non-unitaire de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et soit $\Theta_T(\lambda)$ sa fonction caractéristique (*cf.* [1]). On sait qu'il y a une correspondance biunivoque entre les sous-espaces de $\mathfrak{H}$ (non banaux), invariants pour T, et les factorisations de $\Theta_T(\lambda)$ en produit de deux fonctions analytiques contractives (non constantes unitaires)[1]), vérifiant encore une certaine condition supplémentaire (*cf.* [2], § 3). Par exemple, si $\Theta_T(\lambda)$ est intérieure (c'est le cas si $T^{*n} \to O$), cette condition supplémentaire exige que les facteurs soient aussi des fonctions intérieures (*cf.* [2], § 4).

Cela impose le problème de savoir s'il existe du tout des factorisations de $\Theta_T(\lambda)$ en produit de deux fonctions analytiques contractives, non constantes unitaires (satisfaisant à la condition supplémentaire mentionnée, ou non). Une réponse négative donnerait immédiatement un exemple d'un opérateur n'admettant pas de sous-espaces invariants non banaux.

Nous verrons que cette situation (heureuse?) ne se présente pas. En effet, nous allons démontrer que *toute* fonction analytique contractive (non constante unitaire) admet des factorisations non banales (Théorème 2). Le point principal dans cette démonstration est de construire, pour toute fonction *intérieure* non constante de type $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \Theta(\lambda)\}$, où $\dim \mathfrak{E} = \infty$, une factorisation en produit d'une fonction *extérieure* et d'une fonction *intérieure*, aucune d'elles n'étant une constante unitaire (Théorème 1).

1. Rappelons, pour commencer, que par une *translation unilatérale* dans un espace $\mathfrak{H}$ de Hilbert on entend une isométrie V dans $\mathfrak{H}$ telle que

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^n \mathfrak{A} \quad \text{où} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{H} \ominus V\mathfrak{H},$$

la *multiplicité* de la translation unilatérale V étant égale, par définition, à $\dim \mathfrak{A}$. La projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{A}$ est fournie par

$$P_{\mathfrak{A}} = I - VV^*.$$

V étant une translation unilatérale dans $\mathfrak{H}$, appelons $\pi(V)$ la classe des opérateurs (linéaires bornés) Q de $\mathfrak{H}$ auxquels on peut associer un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_Q$,

[1]) On dira que la fonction $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ est constante unitaire si $\Theta(\lambda) \equiv \Theta_0$ ($|\lambda| < 1$) où Θ_0 est une transformation unitaire de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{E}_*$.

une translation unilatérale V_Q dans $\mathfrak{H}_Q$, et un opérateur A de $\mathfrak{H}_Q$ dans $\mathfrak{H}$, tels que

$$VA = AV_Q \tag{1}$$

et

$$AA^* = Q. \tag{2}$$

Proposition 1. *Pour qu'un opérateur autoadjoint Q de $\mathfrak{H}$, $Q \geqq O$, appartienne à la classe $\pi(V)$, il faut et il suffit qu'on ait*

$$Q - VQV^* \geqq O. \tag{3}$$

Démonstration. Lorsque $Q \in \pi(V)$ il s'ensuit de (1) et (2):

$$Q - VQV^* = AA^* - VAA^*V^* = AA^* - AV_QV_Q^*A^* = A(I - V_QV_Q^*)A^* \geqq O$$

puisque $I - V_QV_Q^* \geqq O$.

Supposons, inversement, que Q vérifie (3). Désignons par R la racine carrée positive de l'opérateur au premier membre de (3). On a alors $Q = R^2 + VQV^*$, d'où il s'ensuit par itération

$$Q = R^2 + VR^2V^* + \cdots + V^nR^2V^{*n} + V^{n+1}QV^{*n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Or, comme V est une translation unilatérale, V^{*n} tend vers O lorsque n croît indéfiniment. Donc il résulte

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} V^nR^2V^{*n}$$

et par conséquent

$$\|Q^{1/2}h\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|RV^{*n}h\|^2 \quad \text{pour tout} \quad h \in \mathfrak{H}. \tag{4}$$

Envisageons l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}_Q$ des suites $\mathbf{x} = \{x_n\}_0^\infty$ telles que $x_n \in \overline{R\mathfrak{H}}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ et $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_0^\infty \|x_n\|^2 < \infty$. Soit V_Q la translation unilatérale dans $\mathfrak{H}_Q$, définie par

$$V_Q\{x_0, x_1, x_2, \ldots\} = \{0, x_0, x_1, \ldots\}.$$

Posons, pour $h \in \mathfrak{H}$,

$$Bh = \{Rh, RV^*h, RV^{*2}h, \ldots\}.$$

Il ressort de (4) que B est un opérateur de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{H}_Q$ tel que

$$\|Bh\|_{\mathfrak{H}_Q} = \|Q^{1/2}h\|_{\mathfrak{H}}. \tag{5}$$

De plus, comme

$$V_Q^*\{x_0, x_1, \ldots\} = \{x_1, x_2, \ldots\},$$

on a

$$BV^*h = \{RV^*h, RV^{*2}h, \ldots\} = V_Q^*Bh,$$

donc $BV^* = V_Q^*B$, $VB^* = B^*V_Q$. L'opérateur $A = B^*$ vérifie donc (1) et, grâce à (5), aussi (2).

Proposition 2. *Soit Q un opérateur de $\mathfrak{H}$, de classe $\pi(V)$ et tel que $O \leqq Q \leqq I$. L'opérateur $Q_\alpha = \alpha Q + (1-\alpha)I$, où $0<\alpha<1$, appartient alors aussi à la classe $\pi(V)$. Dans le cas où V est de multiplicité infinie, on peut choisir $\mathfrak{H}_{Q_\alpha} = \mathfrak{H}$ et $V_{Q_\alpha} = V$, donc, dans ce cas, il existe un opérateur A_α de $\mathfrak{H}$ tel que A_α permute à V et que $Q_\alpha = A_\alpha A_\alpha^*$.*

Démonstration. La première assertion résulte immédiatement de la proposition 1. Quant à la seconde assertion, observons d'abord que

$$R_\alpha^2 = Q_\alpha - VQ_\alpha V^* = \alpha(Q - VQV^*) + (1-\alpha)(I - VV^*) \geqq (1-\alpha)P_{\mathfrak{A}},$$

d'où il dérive $\overline{R_\alpha \mathfrak{H}} \supset (1-\alpha)P_{\mathfrak{A}}\mathfrak{H} = P_{\mathfrak{A}}\mathfrak{H} = \mathfrak{A}$ et par conséquent

$$\dim \mathfrak{H} \geqq \dim \overline{R_\alpha \mathfrak{H}} \geqq \dim \mathfrak{A}. \tag{6}$$

D'autre part, on a

$$\dim \mathfrak{H} = \aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{A} = \dim \mathfrak{A}, \tag{7}$$

puisque $\dim \mathfrak{A}$ est infinie. (6) et (7) entraînent que $\dim \overline{R_\alpha \mathfrak{H}} = \dim \mathfrak{A}$. Ainsi, il existe une application unitaire φ de $\overline{R_\alpha \mathfrak{H}}$ sur $\mathfrak{A}$. Celle-ci induit une application unitaire Φ de l'espace $\mathfrak{H}_{Q_\alpha}$ des suites $\mathbf{x} = \{x_n\}_n^\infty$ $(x_n \in \overline{R_\alpha \mathfrak{H}})$ sur l'espace $\mathfrak{H}$, notamment en posant

$$\Phi \mathbf{x} = \sum_{n=0}^{\infty} V^n(\varphi x_n).$$

On a

$$\Phi(V_{Q_\alpha}\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} V^n(\varphi x_{n-1}) = V \sum_{n=1}^{\infty} V^{n-1}(\varphi x_{n-1}) = V\Phi\mathbf{x}.$$

Ainsi, si l'on identifie les éléments de $\mathfrak{H}_{Q_\alpha}$ et $\mathfrak{H}_{Q_\alpha}$ qui se correspondent par Φ, V_{Q_α} s'identifie à V et l'opérateur A (de $\mathfrak{H}_{Q_\alpha}$ dans $\mathfrak{H}$), associé à Q_α, s'identifie à un opérateur A_α de $\mathfrak{H}$ tel que A_α permute à V et que $A_\alpha A_\alpha^* = Q_\alpha$.

Proposition 3. *Soient A et B des opérateurs dans l'espace $\mathfrak{H}$, permutant à une translation unilatérale V de $\mathfrak{H}$. Supposons de plus que A est isométrique, B est une contraction, et que*

$$BB^* \geqq AA^*. \tag{8}$$

Il existe alors une isométrie C dans $\mathfrak{H}$, permutant à V et telle que $A = BC$.

Démonstration. Grâce à (8) et puisque B est une contraction, on a $I - AA^* \geqq \geqq I - BB^* \geqq O$, d'où il s'ensuit que $(I - AA^*)h = 0$ (pour un $h \in \mathfrak{H}$) entraîne $(I - BB^*)h = 0$. Puisque A est isométrique, on a en particulier $(I - AA^*)Ag = = Ag - AA^*Ag = Ag - Ag = 0$ pour tout $g \in \mathfrak{H}$, donc on a aussi $(I - BB^*)Ag = 0$, $Ag = BB^*Ag$. Ainsi, en posant $C = B^*A$, on a $A = BC$. Puisque A est isométrique et B, C sont des contractions, C est nécessairement isométrique elle aussi.

Comme A et B permutent à V, on a

$$V^*CV = V^*B^*AV = (BV)^*(AV) = (VB)^*(VA) = B^*V^*VA = C$$

d'où

$$(VV^*)CV = VC. \tag{9}$$

Or, C et V étant isométriques, il en est de même de CV et VC. Comme, d'autre part, VV^* est une projection orthogonale (notamment sur $V\mathfrak{H}$), on conclut de (9) que $CV=VC$, ce qui achève la démonstration.

2. Soit A un opérateur isométrique, non unitaire, dans l'espace $\mathfrak{H}$. Supposons que A permute à une translation unilatérale V de $\mathfrak{H}$, de multiplicité *infinie*.

Posons $Q=AA^*$ et $Q_\alpha = \alpha Q+(1-\alpha)I$ où $0<\alpha<1$. D'après la proposition 2, il existe alors un opérateur B_α dans $\mathfrak{H}$, permutant à V et tel que $B_\alpha B_\alpha^*=Q_\alpha$; puisque $O\leqq Q_\alpha \leqq I$, B_α est une contraction de $\mathfrak{H}$. Comme $B_\alpha=\alpha Q+(1-\alpha)I\geqq Q$, on a $B_\alpha B_\alpha^*\geqq AA^*$. En vertu de la proposition 3 il existe donc une isométrie C_α dans $\mathfrak{H}$ telle que C_α et V permutent que $A=B_\alpha C_\alpha$.

Montrons que ni B_α ni C_α n'est pas unitaire. En effet, l'équation $B_\alpha B_\alpha^*=I$ est impossible puisqu'elle entraîne $Q_\alpha=I$, donc $Q=I$, $AA^*=I$ et que par conséquent A (qui était supposé isométrique) est aussi unitaire, ce qui contredit l'hypothèse. D'autre part, si C_α était unitaire, $B_\alpha=A_\alpha C_\alpha^*$ vérifierait la relation $B_\alpha B_\alpha^*=AC_\alpha^*C_\alpha A^*=AA^*$, donc on aurait $Q_\alpha=Q$ et par conséquent de nouveau $Q=I$, ce qui est impossible.

Montrons, finalement, que $B_\alpha\mathfrak{H}$ est dense dans $\mathfrak{H}$. En cas contraire il y aurait un $h\neq 0$ tel que $B_\alpha^*h=0$, $Q_\alpha h=B_\alpha B_\alpha^*h=0$. Comme $Q_\alpha\geqq(1-\alpha)I$ on conclut que $(1-\alpha)h=0$, $h=0$. Contradiction.

Résumons le résultat que nous venons d'obtenir:

Proposition 4. *Tout opérateur isométrique non unitaire A d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, qui permute à une translation unilatérale V de $\mathfrak{H}$ de multiplicité infinie, peut être factorisée en produit $A=BC$ de deux opérateurs non unitaires de $\mathfrak{H}$ permutant à V, dont C est isométrique et B est une contraction telle que $\overline{B\mathfrak{H}}=\mathfrak{H}$.*

Il convient d'ajouter la suivante

Remarque. *Soit T un opérateur dans $\mathfrak{H}$, qui permute à la translation unilatérale V dans $\mathfrak{H}$. T applique $\mathfrak{H}$ unitairement sur $\mathfrak{H}$ si, et seulement si $T|\mathfrak{A}$ applique $\mathfrak{A}$ unitairement sur $\mathfrak{A}$, où $\mathfrak{A}=\mathfrak{H}\ominus V\mathfrak{H}$.*

En effet, si T est unitaire dans $\mathfrak{H}$, du fait que T permute à V il s'ensuit que T permute aussi à V^* et par conséquent à $P_\mathfrak{A} = I-VV^*$, donc $\mathfrak{A}$ réduit T, $T|\mathfrak{A}$ étant alors nécessairement unitaire dans $\mathfrak{A}$. Inversement, si $T|\mathfrak{A}$ applique $\mathfrak{A}$ unitairement sur $\mathfrak{A}$, $T|V^n\mathfrak{A}$ applique $V^n\mathfrak{A}$ unitairement sur $V^n\mathfrak{A}$ (puisque T et V permutent) et par conséquent T applique $\mathfrak{H}=\bigoplus_0^\infty V^n\mathfrak{A}$ unitairement sur $\mathfrak{H}$.

3. Soit $\mathfrak{E}$ un espace de Hilbert séparable et soit $H^2(\mathfrak{E})$ l'espace de Hilbert des fonctions $u(\lambda)=\sum_0^\infty a_n\lambda^n$ $(a_n\in\mathfrak{E}, \sum_0^\infty \|a_n\|^2<\infty)$ avec la norme

$$\|u\| = \left[\sum_0^\infty \|a_n\|^2\right]^{1/2}.$$

Nous plongeons $\mathfrak{E}$ dans $H^2(\mathfrak{E})$ en identifiant l'élément $e\in\mathfrak{E}$ à la fonction constante $u(\lambda)\equiv e$. L'opérateur V défini par

$$(Vu)(\lambda)=\lambda\cdot u(\lambda)$$

est une translation unilatérale dans $H^2(\mathfrak{E})$; en effet on a $H^2(\mathfrak{E}) = \bigoplus_0^\infty V^n\mathfrak{E}$. Donc V a sa multiplicité égale à $\dim \mathfrak{E}$.

Une contraction Θ dans $H^2(\mathfrak{E})$ permute à V s'il existe une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \Theta(\lambda)\}$ telle que

$$(\Theta u)(\lambda) = \Theta(\lambda) u(\lambda) \qquad (|\lambda| < 1)$$

et dans ce cas seulement.

Par définition, $\Theta(\lambda)$ est une fonction *intérieure* si Θ est un opérateur isométrique dans $H^2(\mathfrak{E})$ et $\Theta(\lambda)$ est une fonction *extérieure* si $\Theta H^2(\mathfrak{E})$ est dense dans $H^2(\mathfrak{E})$. La fonction $\Theta(\lambda)$ est *constante unitaire* (c'est-à-dire égale, pour tout λ, à un même opérateur unitaire de $\mathfrak{E}$), si, et seulement si l'opérateur Θ de $H^2(\mathfrak{E})$ est unitaire. Tout cela s'ensuit sans peine de [2], n° 2, en plongeant $H^2(\mathfrak{E})$ de manière évidente dans $L^2(\mathfrak{E})$.[2])

Cela étant, supposons que $\dim \mathfrak{E} = \aleph_0$ et que $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \Theta(\lambda)\}$ est *une fonction intérieure qui n'est pas une constante unitaire.* Comme Θ est isométrique, non unitaire et permute à V, il s'ensuit de la proposition 4 qu'il existe une factorisation $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ en produit de deux opérateurs de $H^2(\mathfrak{E})$, permutant à V, non unitaires, et tels que Θ_1 est isométrique et Θ_2 est une contraction ayant la propriété que $\Theta_2 H^2(\mathfrak{E})$ est dense dans $H^2(\mathfrak{E})$. Ces opérateurs sont alors engendrés par des fonctions analytiques contractives $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \Theta_i(\lambda)\}$ $(i = 1, 2)$ dont $\Theta_1(\lambda)$ est une fonction *intérieure,* $\Theta_2(\lambda)$ est une fonction *extérieure,* aucune d'elles n'étant une constante unitaire.

Ainsi, nous avons obtenu le suivant

Théorème 1. *Lorsque $\mathfrak{E}$ est un espace de Hilbert de dimension $\aleph_0$, toute fonction analytique intérieure $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \Theta(\lambda)\}$ qui n'est pas constante unitaire, peut être factorisée sous la forme*

$$\Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda) \qquad (|\lambda| < 1) \tag{10}$$

en produit de deux fonctions analytiques contractives $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \Theta_i(\lambda)\}$ $(i = 1, 2)$, dont $\Theta_1(\lambda)$ est intérieure, $\Theta_2(\lambda)$ est extérieure, et aucune n'est constante unitaire.

Remarques. Dans le cas où $\dim \mathfrak{E}$ est *finie,* telle factorisation *n'est pas possible.* En effet, $\Theta(\lambda)$ et $\Theta_1(\lambda)$ étant des fonctions intérieures, leurs limites radiales $\Theta(e^{it})$, $\Theta_1(e^{it})$ sont des isométries dans $\mathfrak{E}$, presque partout; vu que $\mathfrak{E}$ est de dimension finie, ces isométries sont nécessairement des opérateurs unitaires dans $\mathfrak{E}$. Il s'ensuit que $\Theta_2(e^{it}) = \Theta(e^{it})\Theta_1(e^{it})^{-1}$ est aussi un opérateur unitaire dans $\mathfrak{E}$, presque partout, d'où il résulte que Θ_2 est une isométrie dans $H^2(\mathfrak{E})$. Comme $\Theta_2(\lambda)$ est une fonction extérieure, $\Theta_2 H^2(\mathfrak{E})$ est dense dans $H^2(\mathfrak{E})$. Ainsi, l'opérateur isométrique Θ_2 est même unitaire. Cela est impossible puisqu'on a supposé que $\Theta_2(\lambda)$ n'est pas constante unitaire.

---

[2]) On étend l'opérateur Θ à $L^2(\mathfrak{E})$ moyennant la définition

$$\tilde{\Theta}\Big(\sum_{|n| \leq N} a_n e^{int}\Big) = e^{-iNt}\,\Theta\Big(\sum_{|n| \leq N} a_n e^{i(n+N)t}\Big)$$

et on tient compte (pour la dernière assertion concernant $\tilde{\Theta}$) de la remarque à la fin du n° précédent.

Ainsi, notre théorème marque des différences essentielles qu'on rencontre, dans le problème des factorisations des fonctions intérieures $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \Theta(\lambda)\}$, lorsqu'on passe du cas où dim $\mathfrak{E}$ est finie au cas où dim $\mathfrak{E}$ est infinie.

Remarquons aussi que si la fonction $\Theta(\lambda)$ figurant dans le théorème est la fonction caractéristique d'une contraction T (aux indices de défaut égaux à $\aleph_0$ et telle que $T^{*n} \to O$; *cf.* [1]), la factorisation (10) ne correspond pas à un sous-espace invariant pour T parce que, dans les factorisations des fonctions caractéristiques intérieures qui correspondent à des sous-espaces invariants, les facteurs doivent aussi être intérieures (*cf.* [2], proposition 4.5).

4. Nous sommes à même de prouver notre

Théorème 2. *Toute fonction analytique contractive* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ ($\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*$ *étant deux espaces de Hilbert séparables), qui n'est pas une constante unitaire, peut être factorisée en produit de deux fonctions analytiques contractives* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ *et* $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ *(où* $\mathfrak{F}$ *est aussi séparable), dont aucune n'est constante unitaire.*

Démonstration. En vertu de [2], § 5, n° 1, $\Theta(\lambda)$ admet les factorisations canoniques $\Theta(\lambda)=\Theta_i(\lambda)\Theta_e(\lambda)=\Theta_{*e}(\lambda)\Theta_{*i}(\lambda)$, où $\Theta_i(\lambda)$ est intérieure, $\Theta_e(\lambda)$ est extérieure, $\Theta_{*i}(\lambda)$ est $*$-intérieure, et $\Theta_{*e}(\lambda)$ est $*$-extérieure. Ainsi, ou bien $\Theta(\lambda)$ admet un facteur intérieur ou $*$-intérieur non-constant, ou bien elle est à la fois extérieure et $*$-extérieure. Dans le second cas, $\Theta(\lambda)$ admet une factorisation non banale en vertu de la proposition 5.3 de [2]. Il suffit donc d'envisager le cas où $\Theta(\lambda)$ est intérieure ou $*$-intérieure. Vu que pour une fonction $*$-intérieure $\Theta(\lambda)$, toute factorisation non banale $\Theta^{\tilde{}}(\lambda)=\Theta'^{\tilde{}}(\lambda)\Theta''^{\tilde{}}(\lambda)$ de la fonction intérieure $\Theta^{\tilde{}}(\lambda)=\Theta(\bar{\lambda})^*$ fournit la factorisation non banale $\Theta(\lambda)=\Theta''(\lambda)\Theta'(\lambda)$ pour $\Theta(\lambda)$, il nous reste à prouver le théorème dans le cas où $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ est une fonction intérieure.

Dans ce cas, $\dim \mathfrak{E} \leq \dim \mathfrak{E}_*$. Ainsi, on peut identifier $\mathfrak{E}$ à un sous-espace de $\mathfrak{E}_*$ et puis on peut plonger $\mathfrak{E}_*$ dans un espace $\mathfrak{F}$ de sorte que $\mathfrak{F} \ominus \mathfrak{E}_*$ soit aussi de dimension $\aleph_0$. Comme $\mathfrak{F} \ominus \mathfrak{E}$ et $\mathfrak{F} \ominus \mathfrak{E}_*$ ont alors la même dimension $\aleph_0$ il existe un opérateur partiellement isométrique Z dans $\mathfrak{F}$ qui applique $\mathfrak{F} \ominus \mathfrak{E}$ isométriquement sur $\mathfrak{F} \ominus \mathfrak{E}_*$ et tel que $Z|\mathfrak{E}=O$. Posons

$$\hat{\Theta}(\lambda) = \Theta(\lambda)P_{\mathfrak{E}}+Z \tag{11}$$

où $P_{\mathfrak{E}}$ est la projection orthogonale de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{E}$, $P_{\mathfrak{E}} = I - Z^*Z$.

Nous avons alors pour tout $f \in \mathfrak{F}$

$$\begin{aligned}\|\hat{\Theta}(e^{it})f\|^2 &= \|\Theta(e^{it})P_{\mathfrak{E}}f+Zf\|^2 = \|\Theta(e^{it})P_{\mathfrak{E}}f\|^2+\|Zf\|^2 = \\ &= \|P_{\mathfrak{E}}f\|^2+\|Zf\|^2 = \big((I-Z^*Z)f,f\big)+(Z^*Zf,f) = \|f\|^2\end{aligned}$$

en tout point t où $\Theta(e^{it})$ est isométrique, donc presque partout. Il en résulte que $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \hat{\Theta}(\lambda)\}$ est une fonction analytique intérieure. Nous pouvons donc appliquer à cette fonction le théorème 1. Ainsi, il existe une factorisation

$$\hat{\Theta}(\lambda)=\hat{\Theta}_2(\lambda)\hat{\Theta}_1(\lambda) \qquad (|\lambda|<1), \tag{12}$$

en fonctions analytiques contractives $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \hat{\Theta}_i(\lambda)\}$ $(i=1, 2)$, dont aucune n'est constante unitaire.

Puisque $\Theta(\lambda)$ applique $\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{E}_*$, il s'ensuit de (11) que $\Theta(\lambda)=P_{\mathfrak{E}_*}\hat{\Theta}(\lambda)|\mathfrak{E}$, où $P_{\mathfrak{E}_*}$ désigne la projection orthogonale de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{E}_*$. Ainsi, (12) entraîne

$$\Theta(\lambda)=\Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda) \qquad (|\lambda|<1), \tag{13}$$

où

$$\Theta_1(\lambda)=\hat{\Theta}_1(\lambda)|\mathfrak{E}, \quad \Theta_2(\lambda)=P_{\mathfrak{E}_*}\hat{\Theta}_2(\lambda).$$

De cette sorte, on a obtenu une factorisation de $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ en produit des facteurs $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ qui sont évidemment des fonctions analytiques contractives. Montrons qu'aucune d'elles n'est une constante unitaire.

Observons d'abord, à cet effet, que pour $g\in\mathfrak{F}\ominus\mathfrak{E}$ on a

$$\|g\|\geqq\|\hat{\Theta}_1(\lambda)g\|\geqq\|\hat{\Theta}_2(\lambda)\hat{\Theta}_1(\lambda)g\|=\|\hat{\Theta}(\lambda)g\|=\|Zg\|=\|g\|$$

donc $\|\hat{\Theta}_1(\lambda)g\|=\|g\|$. Supposons que $\Theta_1(\lambda)\equiv\Theta_{10}$ où Θ_{10} est un opérateur unitaire de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{F}$. On a alors, pour $f\in\mathfrak{E}$, $g\in\mathfrak{F}\ominus\mathfrak{E}$,

$$\begin{aligned}\|f\|^2+\|g\|^2=\|f+g\|^2\geqq\|\hat{\Theta}_1(\lambda)(f+g)\|^2=&\\ =\|\Theta_{10}f+\hat{\Theta}_1(\lambda)g\|^2=\|\Theta_{10}f\|^2+\|\hat{\Theta}_1(\lambda)g\|^2+2\,\mathrm{Re}\,(\Theta_{10}f, \hat{\Theta}_1(\lambda)g)=&\\ =\|f\|^2+\|g\|^2+2\,\mathrm{Re}\big(\Theta_{10}f, \hat{\Theta}_1(\lambda)g\big),&\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Re}\big(\Theta_{10}f, \hat{\Theta}_1(\lambda)g\big)\leqq 0$. Comme cela est vrai pour f aussi bien que pour εf (ε complexe, arbitraire), on a $\big(\Theta_{10}f, \hat{\Theta}_1(\lambda)g\big)=0$, et comme $\Theta_{10}\mathfrak{E}=\mathfrak{F}$, on a nécessairement $\hat{\Theta}_1(\lambda)g=0$, $\|g\|=\|\hat{\Theta}_1(\lambda)g\|=0$. Cela veut dire que $\mathfrak{F}\ominus\mathfrak{E}=\{0\}$, $\mathfrak{E}=\mathfrak{F}$ et par conséquent $\hat{\Theta}_1(\lambda)\equiv\Theta_1(\lambda)\equiv\Theta_{10}$, ce qui contredit ce que $\hat{\Theta}_1(\lambda)$ n'est pas constante unitaire. Donc le facteur $\Theta_1(\lambda)$ dans (13) n'est pas constant unitaire.

Passons au facteur $\Theta_2(\lambda)$ et supposons que $\Theta_2(\lambda)\equiv\Theta_{20}$ où Θ_{20} est un opérateur unitaire de $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{E}_*$. Comme d'autre part $\Theta_2(\lambda)=P_{\mathfrak{E}_*}\hat{\Theta}_2(\lambda)$, où $\hat{\Theta}_2(\lambda)$ est une contraction, on a nécessairement $\hat{\Theta}_2(\lambda)\equiv\Theta_2(\lambda)\equiv\Theta_{20}$. Cela contredit ce que $\hat{\Theta}_2(\lambda)$ n'est pas constante unitaire. Donc $\Theta_2(\lambda)$ n'est pas constante unitaire.

Cela achève la démonstration du théorème 2.

Remarque. Dans une factorisation de type (13) il est essentiel d'admettre que l'espace intermédiaire $\mathfrak{F}$ puisse être choisi indépendamment de $\mathfrak{E}$ et de $\mathfrak{E}_*$. Par exemple, la fonction λ n'admet pas des factorisations non banales en produit de fonctions analytiques numériques, mais on a bien

$$\lambda=\Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda) \quad \text{où} \quad \Theta_2(\lambda)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{et} \quad \Theta_1(\lambda)=\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

(donc $\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_*=E^1$ et $\mathfrak{F}=E^2$).

Ouvrages cités

[1] BÉLA SZ.-NAGY et CIPRIAN FOIAŞ, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VIII. Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 38—71.

[2] BÉLA SZ.-NAGY et CIPRIAN FOIAŞ, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IX. Factorisations de la fonction caractéristique. Sous-espaces invariants, *ibidem*, **25** (1964), 283—316 et **26** (1965), 193—196.

(Reçu le 1 octobre 1965)